

УДК 534.1:519.6

Олександр Ю. Швець, д.ф.-м.н., професор
Володимир А. Печерний, аспірант

Особливості хаотичної динаміки однієї маятникової системи при неідеальному збудженні

Досліджується динамічна система, утворена сферичним маятником, коливання якого збуджуються електродвигуном обмеженої потужності. Для даної системи побудована карта динамічних режимів. Встановлені основні сценарії переходу від регулярних режимів взаємодії до хаотичних. Побудовані та детально вивчені фазові портрети, перерізи та відображення Пуанкаре, розподіли інваріантної міри та спектральної густини регулярних та хаотичних атракторів системи.

Ключові слова: хаотичний атрактор, карта динамічних режимів, неідеальне збудження.

Aleksandr Yu. Shvets, Dr Sci. (Phys.-Math.),
Professor
Volodymyr A. Pechernyi, PhD student

Specificity of chaotic dynamics in some pendulum system with non-ideal excitation

Dynamical system is formed by spherical pendulum which oscillations are initiated by electromotor of limited power is investigated. For such system map of dynamical regimes was constructed. Main scenarios of transition from regular regimes to chaotic ones were established. Phase portraits, Poincare's sections, distributions of invariant measure and spectral density of regular and chaotic attractors of the system were constructed and investigated in details.

Key Words: chaotic attractor, map of dynamical regimes, non-ideal excitation.

E-mail: alex.shvets@bigmir.net, pevlan@online.ua

Статтю представив член редколегії д.ф.-м.н., професор Мелешко В.В.

1 Вступ

Дослідження різноманітних аспектів динамічної поведінки маятникових систем завжди викликали особливий науковий інтерес. Головним чином він пов'язаний з тим, що такі системи широко використовуються для математичного моделювання складних коливальних процесів найрізноманітнішої природи [1]. При цьому маятникові системи залишаються надзвичайно простими за своєю фізичною природою та дозволяють досить легко виконувати експериментальну перевірку виявлених у теоретичних дослідженнях коливальних ефектів.

В переважній більшості досліджень динаміки маятникових систем нехтується зворотнім впливом маятників на джерело збудження їх коливань. Такий підхід виправданий в тих випадках, коли потужність джерела збудження коливань значно перевищує потужність, що споживається маятковою си-

стемою. Такі випадки називаються ідеальними за Зоммерфельдом–Кононенко [2], а саме збудження називається ідеальним. Але в сучасних умовах дуже актуальною стає проблема максимальної мінімізації тих чи інших джерел збудження. Це призводить до того, що потужність джерела збудження виявляється порівнянною з потужністю, яку споживає коливальне навантаження, наприклад маятникова система. В таких випадках врахування зворотного впливу коливального навантаження на функціонування джерела збудження стає нагальною необхідністю. Ці випадки називаються неідеальними за Зоммерфельдом–Кононенко, а саме збудження – неідеальним або обмеженим [2]. Нехтування неідеальністю збудження призводить до грубих помилок при вивченні динаміки маятникових систем. Зокрема може бути повністю втрачена інформація про реально існуючі детерміновані хаотичні режими системи [1, 3, 4].

Дослідження складної нелінійної динаміки

сферичного маятника при неідеальному збудженні були розпочаті в роботах [1, 3, 4]. Для динамічної системи, утвореної сферичним маятником, точка підвісу якого збуджується електродвигуном, в [3, 4] побудована математична модель, яка враховує неідеальність збудження коливаль. Вказаних роботах встановлено існування детермінованого хаосу в досліджуваній системі та визначені деякі ефекти нелінійної взаємодії маятника та електродвигуна.

2 Постановка задачі

Розглянемо динамічну систему, яка утворена фізичним маятником, який може здійснювати просторові коливання, та електродвигуном, вал якого через кривошипно-шатунний механізм у вертикальній площині збуджує точку підвісу маятника (рис. 1). Потужність електродвигуна є обмеженою за величиною та порівняна з енергією, що витрачається при коливаннях маятника. Тобто, розглядається маятникова система при неідеальному збудженні коливаль.

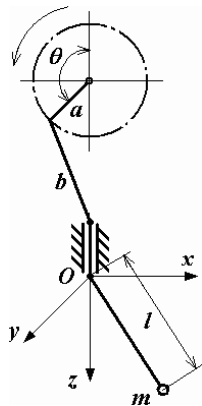


Рис. 1 Динамічна система "сферичний маятник-електродвигун"

Основною метою роботи є побудова карти динамічних режимів, яка дозволить узагальнити особливості нелінійної взаємодії маятника та електродвигуна. Така карта дозволяє дослідити регулярні та хаотичні режими системи "сферичний маятник - електродвигун", які виникають при зміні управляючих параметрів.

3 Математична модель системи і методи її дослідження

Для системи "сферичний маятник - електродвигун" у роботах [3, 4] побудована математична модель, яка враховує неідеальність збудже-

ння коливаль. У відповідності до вказаних робіт введемо декартову систему координат $Oxyz$, як показано на рис. 1. Тоді для невідомих функцій $\alpha(t), \beta(t)$ – кутів відхилення маятника від відповідних координатних площин, та $\Theta(t)$ – кута повороту вала електродвигуна, математична модель може бути записана системою нелінійних диференціальних рівнянь (1) [1, 3, 4]. В систему (1) входять наступні фізичні параметри: I – момент інерції ротора електродвигуна; $L(\dot{\Theta})$ – рухомий момент електродвигуна; $H(\dot{\Theta})$ – внутрішній момент сил опору обертання ротора електродвигуна; $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ – власна частота маятника; δ_1 – коефіцієнт демпфування сили опору середовища, в якому рухається маятник.

$$\begin{aligned} I\ddot{\Theta} &= L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) - mla\left[\ddot{\Theta}\frac{a}{l}\sin^2\Theta + \right. \\ &\quad \left. + \dot{\Theta}^2\frac{a}{l}\sin\Theta\cos\Theta + \frac{g}{l}\sin\Theta - (\dot{\alpha}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \dot{\beta}^2)\sin\Theta - (\alpha\dot{\alpha} + \beta\dot{\beta})\sin\Theta\right], \\ \ddot{\alpha} + \omega_0^2\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6a} + \frac{\alpha\beta^2}{2}\right) + \delta_1\dot{\alpha} + \alpha(\dot{\beta}^2 + \\ &\quad + \beta\dot{\beta}) - \frac{a}{l}\alpha(\dot{\Theta}^2\cos\Theta + \ddot{\Theta}\sin\Theta) = 0, \\ \ddot{\beta} + \omega_0^2\left(\beta - \frac{\beta^3}{6a} + \frac{\alpha^2\beta}{2}\right) + \delta_1\dot{\beta} + \beta(\dot{\alpha}^2 + \\ &\quad + \alpha\dot{\alpha}) - \frac{a}{l}\beta(\dot{\Theta}^2\cos\Theta + \ddot{\Theta}\sin\Theta) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Припускається, що реалізуються умови основного параметричного резонансу, коли швидкість обертання вала двигуна $\dot{\Theta}$ близька до подвоєної власної частоти маятника $2\omega_0$, а саме

$$\dot{\Theta}(t) = 2\omega_0 + \varepsilon\omega_0\nu(t), \text{ де } \varepsilon = \frac{a}{l}, a \leq l. \quad (2)$$

Для дослідження резонансних коливаль маятника у рівняннях (1) проводиться заміна змінних за формулами

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[y_1(\tau)\cos\frac{\Theta(t)}{2} + y_2(\tau)\sin\frac{\Theta(t)}{2}\right], \\ \beta(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[y_4(\tau)\cos\frac{\Theta(t)}{2} + y_5(\tau)\sin\frac{\Theta(t)}{2}\right], \\ \tau &= \frac{\varepsilon}{4}\Theta(t), \end{aligned} \quad (3)$$

та виконується процедура усереднення за швидким часом [1, 3, 4]. В результаті чого отримується наступна система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= Cy_1 - [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_2 - \\
 &\quad - \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_4 + 2y_2, \\
 \dot{y}_2 &= Cy_2 + [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_1 - \\
 &\quad - \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_5 + 2y_1, \\
 \dot{y}_3 &= D(y_1y_2 + y_4y_5) + Ey_3 + F, \\
 \dot{y}_4 &= Cy_4 - [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_5 + \\
 &\quad + \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_1 + 2y_5, \\
 \dot{y}_5 &= Cy_5 + [y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_4 + \\
 &\quad + \frac{3}{4}(y_1y_5 - y_2y_4)y_2 + 2y_4.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Отримана система диференціальних рівнянь (4) використовується в якості математичної моделі детермінованої коливальної системи "сферичний маятник – електродвигун". В (4) введені позначення:

$$\begin{aligned}
 F &= \left(\frac{N_0}{\omega_0} - 2E\right)\frac{l}{a}, & D &= -\frac{2ml^2}{I + \frac{1}{2}ma^2}, \\
 C &= -\frac{\delta_1}{\omega_0}, & y_3 &= \nu.
 \end{aligned}$$

Система рівнянь (4) явно містить чотири управляючих параметри: C , D , E та F , які визначаються через електричні та механічні характеристики досліджуваної системи. Параметр E безпосередньо визначається кутом нахилу статичної характеристики електродвигуна, параметр C пропорційний опорі середовища. D та F є мультипараметрами динамічної системи (4). Вони залежать від довжини та маси маятника, його власної частоти, коефіцієнта демпфування, лінійних розмірів кривошипно-шатунного механізму, моменту інерції ротора і також від параметрів статичної характеристики електродвигуна.

Загальна методика виконання досліджень нелінійної динаміки коливальних систем визначена в [1]. Вона спирається на аналіз спектрів ляпуновських характеристичних показників, фазових портретів регулярних та хаотичних атракторів, їх перерізів та відображень Пуанкаре, розподілів інваріантної міри та спектральної густини. Оскільки математична модель (4) системи "сферичний маятник - електродвигун" є нелінійною, з розмірністю фазового простору рівною п'яти, тому для вивчення

регулярних та хаотичних режимів використовувався комплекс чисельних методів [1].

Проведення такого дослідження вимагає надзвичайно великого обсягу чисельних експериментів, які можуть бути проведені тільки з застосуванням сучасної обчислювальної техніки. Для комп'ютерної реалізації вказаних методів було розроблено спеціалізований пакет програмних модулів.

4 Карта динамічних режимів

Карта динамічних режимів представляє собою діаграму на площині, на осях якої відкладені довільні два параметри системи (біфуркаційні параметри) та вказані області усталених динамічних режимів різних типів. На основі практичних критеріїв існування детермінованого хаосу [1] розроблено алгоритм побудови карти динамічних режимів. Він полягає в діагностиці режимів взаємодії, які встановлюються між маятником та електродвигуном, на деякій множині значень біфуркаційних параметрів.

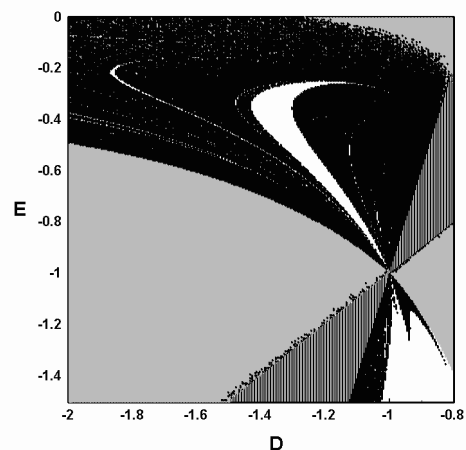


Рис. 2 Карта динамічних режимів

На рис. 2 наведено, отриманий в результаті аналізу та обробки даних комп'ютерних експериментів, один із листів карти динамічних режимів системи "сферичний маятник - електродвигун". Він побудований відносно параметрів D, E при значеннях $C = -0.5, F = 0.5$. Початкові умови варіювалися в околі початку координат фазового простору.

На даному листі карти наведені області чотирьох різних типів динамічних режимів. Сірим кольором нанесені області значень параметрів D, E , при яких в системі встановлюватимуться положення рівноваги. Сигнатура спектру ЛХП в даному випадку матиме вигляд

$\langle -, -, -, -, - \rangle$. Білим кольором нанесені області значень параметрів D, E , при яких в системі існують граничні цикли з сигнатурою спектру ЛХП $\langle 0, -, -, -, - \rangle$. Чорним кольором нанесені області детермінованого хаосу, коли в фазовому просторі системи встановлюються хаотичні аттрактори із сигнатурою $\langle +, 0, -, -, - \rangle$. Як видно з рис.2, чорні області карти динамічних режимів мають білі включення, так звані вікна періодичності. Нарешті, на області значень параметрів D, E , яка на рис.2 заштрихована вертикальними сірими лініями, не встановлено існування жодного аттрактора у фазовому просторі системи. Траєкторії системи (4) в даному випадку прямують на нескінченність.

Наведений лист карти динамічних режимів показує (рис. 2), що хаотичні режими займають значні області в просторі параметрів досліджуваної системи. Періодичні режими навпаки, встановлюються на значно менших за площею областях параметрів системи.

5 Дослідження усталених режимів взаємодії

Для дослідження особливостей виникнення детермінованого хаосу в системі "сферичний маятник - електродвигун" зробимо переріз карти динамічних режимів (рис.2) при $E = -0.5$. Проаналізуємо зміни динамічних режимів, які відбуваються вздовж даного перерізу при зміні величини параметра D .

На рис.3 побудований графік залежності старшого відмінного від нуля характеристичного показника системи (4). Як відомо, основний практичний критерій існування детермінованого хаосу в системі полягає у присутності в спектрі ЛХП принаймні одного додатного показника [1]. На рис.3 показано, що існує рід інтервалів значень параметра D , при яких побудований графік знаходиться в додатній напівплощині. Такі інтервали відповідають чорним областям карти динамічних режимів (рис.2), на яких у фазовому просторі системи (4) існують хаотичні аттрактори.

На рис.4 наведена фазопараметрична характеристика досліджуваної системи, так зване біфуркаційне дерево. Насичено чорним областям даної характеристики відповідають інтервали значень параметра D , при яких граничними множинами у фазовому просторі системи

будуть хаотичні аттрактори. На тих інтервалах значень параметра D , де біфуркаційне дерево складається з фіксованої кількості ліній, у фазовому просторі системи існують граничні цикли.

Розглянемо найширше вікно періодичності наявне в околі точки $D = -1.3$. Уважний розгляд структури біфуркаційного дерева в околі точки $D = -1.3$ дозволяє виявити розщеплення його "гілок" при зменшенні параметра D . Це свідчить про перехід до хаосу через каскад біфуркацій подвоєння періоду за сценарієм Фейгенбаума [5]. При зменшенні параметра D перехід до хаосу здійснюється внаслідок однієї біфуркації через переміжність [6].

Вивчаючи динаміку системи "сферичний маятник - електродвигун" при переході від регулярних режимів до хаотичних були встановлені реалізації сценаріїв двох основних типів. Це перехід до хаосу через переміжність [6] та через каскад біфуркацій подвоєння періоду [5]. Проаналізуємо особливості кожного із сценаріїв.

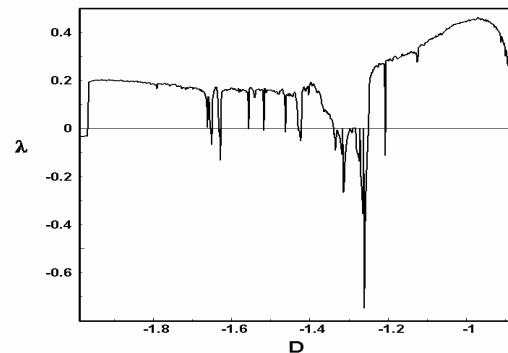


Рис. 3 Графік залежності старшого відмінного від нуля характеристичного показника

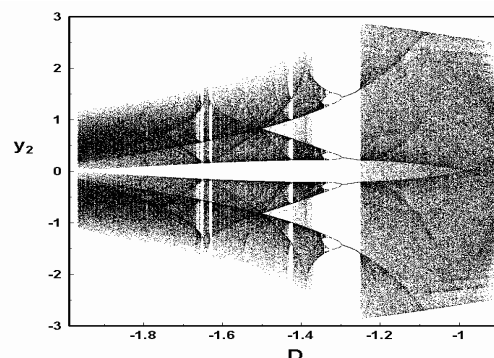


Рис. 4 Фазопараметрична характеристика

На рис.5(а) наведено проекцію фазового

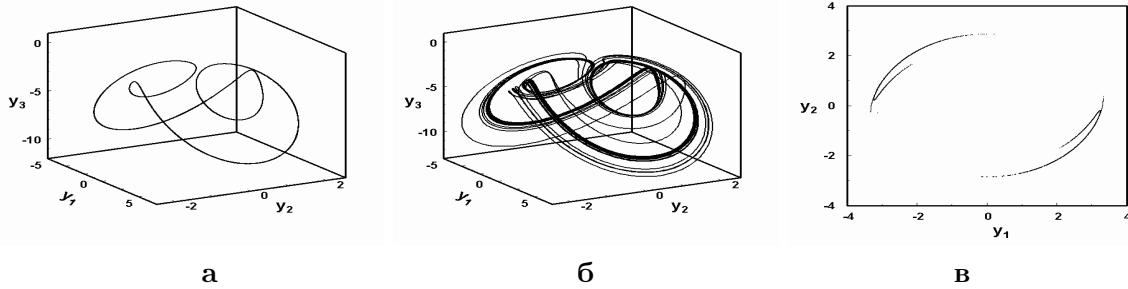


Рис. 5 Проекція фазового портрета граничного циклу при $D = -1.252$ (а) та хаотичного атратора при $D = -1.250$ (б); переріз Пуанкаре хаотичного атратора при $D = -1.250$ (в)

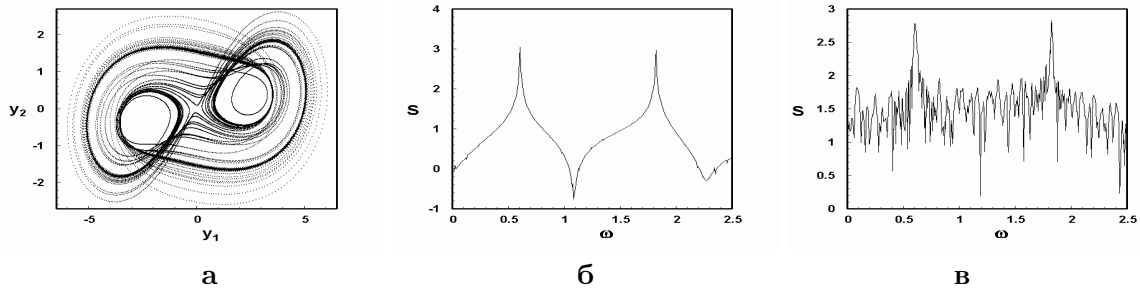


Рис. 6 Розподіл інваріантної міри хаотичного атратора при $D = -1.250$ (а); Фур'є-спектри граничного циклу при $D = -1.252$ (б) та хаотичного атратора при $D = -1.250$ (в)

портрету стійкого граничного циклу, побудованого при $D = -1.252$. Аналогічну структуру мають і інші граничні цикли з околу D , а в системі "сферичний маятник – електродвигун" встановлюється регулярний режим взаємодії, при якому маятник здійснює періодичні коливання. При зменшенні за модулем величини параметра D внаслідок дотичної біфуркації в системі виникає хаотичний атрaktor, проекція фазового портрету якого наведена на рис.5(б). Переріз Пуанкаре утвореного хаотичного атратора побудований на рис.5 (в). Даний переріз представляє собою деяку хаотичну множину, кількість точок якої збільшуватиметься із збільшенням часу чисельного інтегрування системи (4).

В даному випадку реалізується сценарій переходу до хаосу через переміжність за Помо та Маневіллем [6]. Особливість реалізації даного сценарію полягає у присутності в динаміці хаотичного режиму системи двох якісно різних фаз. Перша з них, більш тривала в часі, ламінарна фаза, в якій траєкторії системи здійснюють рух в околі зниклого після біфуркації граничного циклу. Друга, коротко тривала в часі, турбулентна фаза, в якій відбуваються непередбачені відходи траєкторій у віддалені області фазового простору.

Важливою характеристикою утвореного хаотичного атратора є розподіл інваріантної міри. Такий розподіл показує відносний час перебування зображуючої точки системи (4) у деякій області фазового простору. Більш темно нанесені точки на рис. 6(а) близькі до контуру зниклого граничного циклу та відповідають ламінарній фазі переміжності. Точки нанесені більш світлим кольором на рис. 6(а) відповідають турбулентній фазі.

На рис. 6(б) та 6(в) наведені Фур'є-спектри граничного циклу та утвореного хаотичного атратора. Для граничного циклу, якому відповідають періодичні коливання маятника, Фур'є-спектр є дискретним та гармонічним. У хаотичного атратора Фур'є-спектр суцільний та неперервний, але в його структурі також проявляється особливість реалізації даного сценарію. Як видно з рис. 6(в) в Фур'є-спектрі хаотичного атратора присутні спектральні складові, які наближено повторюють гармоніки зниклого граничного циклу.

Інший сценарій, який реалізується в системі "сферичний маятник – електродвигун", це сценарій Фейгенбаума або перехід до хаосу через каскад біфуркацій подвоєння періоду [5]. На рис. 7(а-б) наведені проекції фазових портретів граничних циклів, утворених внаслідок першої,

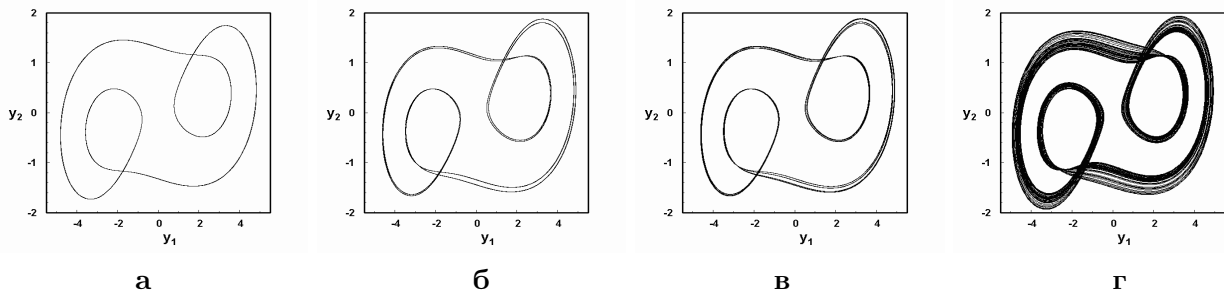


Рис. 7 Проекції фазових портретів граничних циклів при $D = -1.329$ (а), $D = -1.337$ (б), $D = -1.339$ (в) та хаотичного атратора при $D = -1.350$ (г)

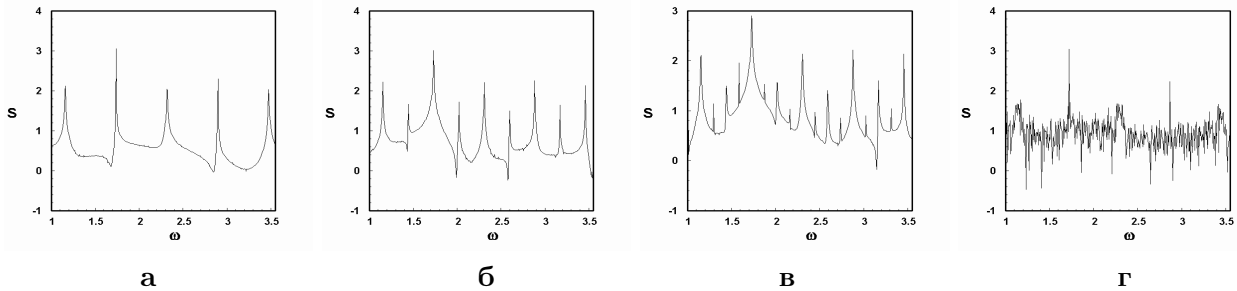


Рис. 8. Фур'є-спектри граничних циклів при $D = -1.329$ (а), $D = -1.337$ (б), $D = -1.339$ (в) та хаотичного атратора при $D = -1.350$ (г)

другої та третьої біфуркації подвоєння періоду. Такий процес повторюється до критичної точки накопичення біфуркацій подвоєння періоду після якої відбувається руйнування тонкої структури граничного циклу та виникає хаотичний атратор (рис. 7(г)).

Проаналізуємо еволюцію Фур'є-спектрів даного каскаду біфуркацій подвоєння періоду. Після кожної такої біфуркації в спектрі з'являється субгармонійна складова рівно посередині між гармоніками основного періоду. В за критичній області відбувається зворотний процес руйнування субгармонік та виникнення ділянок суцільного спектру (рис. 8).

6 Висновки

Таким чином, детермінована система "сферичний маятник – електродвигун" демонструє досить велику різноманітність регулярної та хаотичної поведінки. Побудована карта динамічних режимів показує можливість реалізації чотирьох різних типів взаємодії маятника та електродвигуна. При цьому хаотичні режими, які встановлюються у системі, не є винятковими, а навпаки, займають великі області в просторі параметрів системи. Зауважимо, що при ідеальному збудженні в такій системі взагалі не існує хаотичних режимів [1].

Список використаних джерел

1. Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. – М.-Ижевск: R&CD, 2008. – 280 с.
2. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964. – 256 с.
3. Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. Хаотические колебания сферического маятника как эффект взаимодействия с источником энергии // Прикл. механика – 1992. – 28, №10. – С. 61–68.
4. Швец А.Ю. Детерминированный хаос сферического маятника при ограниченном возбуждении // Укр. мат. журн. – 2007. – 59, №4. – С. 534–548.
5. Feigenbaum M.J. Quantative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. – 1978. – 19. – P. 25–52.
6. Manneville P., Pomeau Y. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems // Physica D. – 1980. – 1. – P. 219–226.